Die Forschungen zur Didaktik der Mathematik als Epistemologie des Erlernens der Mathematik

D'Amore B. (2004). Die Mathematikdidaktische forschung als Epistemologie des Mathematiklernens. In: AA. VV. (2004). *Didaktik der Mathematik in der Primärschule*. Lussemburgo: Ministère de l'Éducation nationale de la Formation professionelle et des Sports. ISBN 2 – 87995 – 108 –9. 65-98.

Bruno D'Amore
Fachbereich Mathematik - Universität Bologna, Italien
Fakultät für Bildungswissenschaften, Universität Bozen, Italien

0. Vorbemerkungen

Die derzeitigen Forschungen im Bereich der Fachdidaktik scheinen ausschließlich darauf ausgerichtet zu sein, die Aufmerksamkeit auf das Phänomen des Lernvorgangs zu richten, jedoch unter einem grundlagenbezogenen Gesichtspunkt, und in keinem Falle in Form einer Konsensfindung zu einem einzigen Modell der Lerntheorie (auch wenn die kognitive Psychologie derzeit die einflussreichste Kandidatin für die Rolle einer grundlegenden Organisatorin vieler Forschungserfahrungen zu sein scheint).
Ich möchte die Fachdidaktik als Epistemologie des Lernvorgangs verstehen und dazu Beispiele aus einem Bereich vorführen, in dem ich kompetent bin, und zwar der Mathematik. Diskussionen mit Kollegen, Didaktikern aus anderen Fächern und gelegentliche Lektüren haben in mir jedoch die Überzeugung bestätigt, dass die allgemeinen Probleme stets die gleichen zu sein scheinen, wenn auch in unterschiedlicher Ausprägung. Obwohl ich meinen engen und oben skizzierten Bereich nicht verlassen will (oder kann), bin ich daher überzeugt, dass mögliche - und vergleichbare - kritische Berichte von Angehörigen anderer Forschungssektoren nicht viel anders ausfallen dürften.
Was ich an dieser Stelle unternehmen möchte, lässt sich schnell angeben. Ich werde einige Probleme analysieren, die sich in den letzten Jahren besonders intensiv auszuprägen scheinen, da sie sich als Forschungselemente der Didaktik der Mathematik konsolidieren konnten, und da ich glaube, dass sie feste und bedeutsame Ankerpunkte für eine mögliche Verallgemeinerung liefen könnten. Ich werde auf allzu fachliche Präsentationen verzichten und mich daher auf die Vorstellung einzelner Aufgaben beschränken, wobei ich in den nächsten Abschnitten einige Themen skizzieren möchte, die in der Welt der Forschung weit verbreitet sind und die Lehrenden[1] besonders interessieren könnten.

1. Der "contrat didactique"

In den siebziger Jahren tauchte in der Welt der Forschung zur Didaktik der Mathematik die Vorstellung des *contrat didactique* auf; diese Idee wurde durch Guy Brousseau (1986) eingeführt und erwies sich sofort als fruchtbar; sie wurde dann endgültig

[1] Vielleicht besser als: Lehrerinnen und Lehrer, oder: LehrerInnen; Anm. d. Übers.

durch seine Forschungen zu Anfang der achtziger Jahre bestätigt. Anschließend gab es Untersuchungen in der zweiten Hälfte der achtziger Jahre, die in uneingeschränkter Form zum Triumph und zur Theoretisierung dieses Ansatzes führten; an diesen Untersuchungen beteiligten sich Forscher aus der ganzen Welt; die Idee wurde anerkannt und in die Sprache der gesamten internationalen Gemeinschaft aufgenommen.
Diese Vorstellung verdankt sich uneingeschränkt französischem Geist[2] und war nicht vollständig neu. 1973 führte Jeanine Filloux den Terminus *contrat pédagogique* ein, um einige Typen der Beziehungen zwischen Lehrenden und Lernenden[3] zu definieren. Filloux dachte an einen allgemeinen Vertrag, der eher sozialer als kognitiver Art sein sollte; demgegenüber berücksichtigt der *contrat didactique* auch die jeweils beteiligten Kenntnisse. Ein erster Versuch einer "Definition" des *contrat didactique* könnte wie folgt lauten: "In einer Unterrichtssituation, die durch einen Lehrenden vorbereitet und umgesetzt wird, besteht die Aufgabe des Lernenden im allgemeinen darin, eine ihm vorgelegte (Rechen-) Aufgabe zu lösen; der Zugang zu dieser Aufgabe erfolgt jedoch über eine Interpretation der vorgegebenen Fragen, der bereitgestellten Informationen und der auferlegten Pflichten, die als Konstanten der Lehrmethode des Lehrenden auftauchen. Diese (spezifischen) Gewohnheiten des Lehrenden, die der Lernende erwartet, und auf der anderen Seiten die Verhaltensweisen des Lernenden, die der Lehrende erwartet, bilden den *contrat didactique* (Brousseau, 1986).
Häufig gehen diese "Erwartungen" nicht auf spezifische Vereinbarungen zurück, die durch die Schule oder durch die Lehrenden vorgegeben oder mit den Lernenden abgesprochen würden, sondern auf das Vorverständnis von Schule und Mathematik sowie auf die Wiederholung bestimmter Modalitäten.

Einige Beispiele:

Beispiel 1 ('Vorverständnis von Schule'): Der Lernende geht davon aus, dass die Schule anleitend und bewertend ist; also auch dann, wenn der Lehrende den Lernenden dazu auffordert, *frei* das aufzuschreiben, was er denkt (zum Beispiel: zu den Höhen eines Dreiecks), wird der Lernende davon ausgehen, er müsse dies in einer möglichst strengen Sprache tun, denn er setzt voraus, dass hinter der Aufforderung des Lehrenden in welcher Form auch immer eine Prüfung und eine Kontrolle stecken müssen; er wird keineswegs "frei" schreiben, sondern er wird stattdessen versuchen, jene Definition anzugeben, die er als 'richtig" ansieht, also die Definition, die er als die vom Lehrenden erwartete Antwort betrachtet.
Beispiel 2 ('Verständnis von Mathematik'): Der Lernende setzt voraus, dass in der Mathematik *gerechnet* werden muss; auch wenn die Antwort auf die in einer Aufgabe enthaltene Frage lediglich mit Worten gegeben werden kann, wird sich daher der Lernende unwohl fühlen und dazu neigen, Zahlenangaben zu verwenden, um in jedem Falle eine formale Antwort zu bieten.
Beispiel 3 ('Wiederholung von Modalitäten'): An drei aufeinander folgenden Montagen lässt der Lehrende Übungen an der Tafel durchführen; dann weiß der Lernende, dass es jeden Montag so sein wird; eine Änderung des erwarteten Programms wird Überraschungen auslösen. Gleiches gilt z.B. auch für die Erwartungen zu möglichen Themen einer mündlichen Überprüfung; wenn der Lehrende stets und ausschließlich

[2] Ich denke an Jean-Jacques Rousseau und seinen *Contrat social* (1762).
Anmerkung des Übersetzers: das italienische Original hat: *contratto didattico.* Im Deutschen ist *didaktischer Vertrag / Unterrichtsvertrag* möglich; ich habe es jedoch vorgezogen, den französischen Originalterminus beizubehalten.
[3] Vielleicht besser als: Schülerinnen und Schüler, oder: SchülerInnen; Anm d. Übers.

Fragen zu den Themen der letzten Unterrichtsstunden gestellt hat, kann und darf er - so der Lernende - keine Fragen zu Themen stellen, die in der Vergangenheit den Stoff von Schulstunden dargestellt hatten ...

Die Untersuchung der verschiedenen Erscheinungsformen des Verhaltens der Lernenden unter diesem Blickwinkel hat reiche und überaus interessante Früchte gezeitigt. Inzwischen konnten viele Verhaltensweisen, die bis vor kurzem als unerklärbar galten oder dem mangelnden Interesse, der Unwissenheit oder der Unreife zugeschrieben wurden, geklärt werden.
Eine der bekanntesten Untersuchungen ist unter dem Namen *Das Alter des Kapitäns* bekannt und wurde in einem Buch unter diesem Titel von der französischen Psychologin Stella Baruk 1985 veröffentlicht. Ich werde dieses Beispiel so wiedergeben, wie ich es persönlich erlebt habe (und habe erleben lassen) (D'Amore, 1993a). In einer vierten Grundschulklasse (Alter der Lernenden: 9 bis 10 Jahre) einer bedeutenden landwirtschaftlichen Kleinstadt stellte ich diese berühmte Aufgabe (in der der "Kapitän" zum "Schäfer" wird): "Ein Schäfer hat 12 Schafe und 6 Ziegen. Wie alt ist der Schäfer?"
Im Chor, absolut sicher und ohne Ausnahmen oder Vorbehalte, gaben *alle* Kinder die erwartete Antwort: "18". Der entsetzten Lehrerin konnte ich erklären, dass dieses Ergebnis auf den didaktischen Kontext zurückzuführen ist: sie hatte niemals Aufgaben ohne Lösung oder unmögliche (entsprechend einer der vielen Formen der Unmöglichkeit) Aufgaben gestellt (D'Amore, Sandri 1993). Daher hatten die Lernenden in den *contrat didactique* eine Klausel eingefügt, die ungefähr folgendes besagt: "Wenn unsere Lehrerin uns eine Aufgabe stellt, dann ist sie bestimmt zu lösen". Und da es eine *tödliche* Vertragsklausel gibt, derzufolge die in einem Text auftauchenden Zahlenangaben ausnahmslos (einmal und nur ein einziges Mal) zu verwenden sind, und möglichst auch noch in jener Reihenfolge, in der sie auftauchen, hatten die Kinder dieser Klasse keine andere Möglichkeit und keinen Ausweg: sie *mussten* unter Verwendung der Zahlendaten 12 und 6 antworten. Die einzige Unsicherheit bestand, wenn überhaupt, in der Auswahl des durchzuführenden Rechenvorgangs. Es ist natürlich denkbar, dass die Auswahl zufällig auf die Addition gefallen ist; ich hatte jedoch einen besonders lebhaften blonden Jungen gefragt, wieso er nicht zum Beispiel eine Division vorgenommen hatte; nach kurzer Überlegung erklärte er mir: "Nein, dann ist es zu klein!" und bezog sich damit natürlich auf das Alter des Schäfers ...

[An dieser Stelle ließe sich eine Anmerkung zur Didaktik und zur Schullaufbahn einfügen. Die Ministerialprogramme für die italienischen Grundschulen enthalten eine ausdrückliche Aufforderung an die Lehrenden, den Lernenden Aufgaben mit fehlenden Daten, mit zu vielen Daten und mit widersprüchlichen Daten zu stellen. Es handelt sich hierbei nicht um eine Bösartigkeit, die durch einen engstirnigen und unsensiblen Bürokraten ausgeheckt worden wäre, sondern um eine Anregung zu einem Versuch, genau diese schädlichen Klauseln aus dem *contrat didactique* zu entfernen; es ist bekannt, dass Kinder im allgemeinen den Text einer Aufgabe nur flüchtig lesen: sie beschränken sich darauf, die Aufgabe kurz zu überfliegen; sie konzentrieren sich dann auf die Zahlenangaben und versuchen, 'intuitiv' die Art des benötigten Rechenvorgangs zu erahnen. Aber wenn sich die Lernenden so verhalten, dann muss es etwas oder jemanden geben, der sie zu dieser Verhaltensweise veranlasst hat; es ist unnütz, nach Rechtfertigungen zu suchen, die (vermeintlich) mit der vielen Zeit zusammenhängen, die die Kinder vor dem Fernsehen verbringen, oder mit der Auflösung der Familien, mit fehlender Lektüre, mit dem Verlust an Interesse usw. Es han-

delt sich vielmehr um Klauseln des *contrat didactique*, die sich der kritischen Kontrolle der Erwachsenen entzogen haben, und die sogar manchmal explizit vorzuliegen scheinen.
Es gibt zwei Beweise für die Tatsache, dass es nicht angeht, in vereinfachender Form den "Zeiten" die Schuld zuweisen zu wollen ...
<u>Erster Beweis</u>: Die *gleichen* Kinder geben in einem Umfeld, das nicht mehr dem Klassenumfeld entspricht, auf die gleiche Aufgabenstellung hin nicht mehr die oben besprochene Antwort, sondern sie erkennen die Unvereinbarkeit zwischen den Daten und der Aufgabe.
<u>Zweiter Beweis:</u> Die Lernenden einer *anderen* Klasse, in der der Lehrende schon mehrfach derartige Aufgaben gestellt hatte, sind daran gewöhnt, aufzupassen; wenn der Lehrende eine Aufgabe stellt, dann muss man den Text genau analysieren; im Falle der "Schäfer - Aufgabe" hatten diese Kinder nach einigem Gelächter und verstohlenen Blicken, die sie sich gegenseitig zuwarfen, in ironischer Form geantwortet und darauf hingewiesen, dass man die Aufgabe in der gestellten Art und Weise nicht lösen kann.]

Der Ausdruck *"Alter des Kapitäns" - Effekt* bezeichnet heute das Verhalten eines Lernenden, der die Antwort auf eine Aufgabe so berechnet, dass er einen Teil oder die Gesamtmenge der Zahlen benutzt, die im Text vorkommen, auch wenn die Aufgabe überhaupt keine zahlenmäßige Lösung aufweist.
Natürlich beschränkt sich dieser "Fall" nicht auf die Grundschule, sondern er betrifft - mit den erforderlichen Veränderungen - jeden Schultyp.
Dieser Effekt fällt unter die so genannten 'Brüche' des *contrat didactique*: auch wenn der Lernende die Absurdität der gestellten Aufgabe einsieht, muss er persönlich einen Bruch des *contrat didactique* auf sich nehmen, um antworten zu können, dass die Aufgabe nicht lösbar ist. Denn diese neue Situation widerspricht allen seinen Erwartungen, allen seinen Gewohnheiten und allen Klauseln, die bislang im Rahmen der Unterrichtssituationen zur Anwendung gekommen waren. Aber der Lernende hat nicht die Kraft - da man ihn niemals daran gewöhnt hat - , den Vertrag aufzulösen, und er zieht es vor, die dem Vertrag zu Grunde liegenden Klauseln zu respektieren, um kein Risiko eingehen zu müssen, und um nicht in der ersten Person etwas zu wagen.

Eingehende Untersuchungen zum *contrat didactique* haben es gestattet, zu zeigen, dass Kinder und Jugendliche ganz besondere Erwartungen, allgemeine Schemata und Verhaltensweisen mitbringen, die im engeren Sinne nichts mit Mathematik zu tun haben, sondern die von dem im Unterricht eingerichteten *contrat didactique* abhängen.

Zum Beispiel gibt es in einer Untersuchung zu Aufgaben mit fehlenden Daten und zum Verhalten der Lernenden bei derartigen Aufgaben (D'Amore, Sandri, 1998) einen Text, der in der dritten Grundschulklasse (8 bis 9 Jahre) und in der zweiten Klasse der Mittelschule[4] (Alter: 12 bis 13 Jahre) gestellt worden war:

"Giovanna und Paola gehen einkaufen; Giovanna gibt 10.000 Lire aus, und Paola 20.000 Lire. Wer hat am Schluss mehr Geld übrig, Giovanna oder Paola?"

[4] Die italienische Mittelschule umfasst die Klassen 6 bis 8; Anm. d. Übers.

Und hier nun der Grundtyp der Antworten, die in der dritten Klasse im allgemeinen gegeben werden; ich wähle das Antwortprotokoll von Stefania und gebe es genauso wieder, wie die Schülerin es abgefasst hatte:

Stefania:
In der Geldbörse bleibt mehr Geld übrig bei: Giovanna
30 - 10 = 20
10 x 10 = 100

Die Antwort "Giovanna" (58,4 Prozent der Antworten in der dritten Grundschulklasse; Alter der Lernenden: 8 bis 9 Jahre) ist dadurch zu erklären, dass - dies ist die Klausel zur Festlegung der Erwartungen und des konstanten Verhaltens - der Lernende davon ausgeht, dass dann, wenn der Lehrende eine Aufgabe gibt, diese *gelöst werden kann*; auch wenn der Lernende merkt, dass die Angabe der Anfangssumme fehlt, so wird er diese Antwort implizit mehr oder weniger wie folgt erfinden: "Diese Aufgabe *muss* gelöst werden; vielleicht hatten Giovanna und Paolo am Anfang den gleichen Betrag". Anschließend *ist die Antwort richtig*: Giovanna gibt weniger aus, und es bleibt ihr natürlich mehr Geld übrig. Und dadurch erklärt sich der schriftliche Teil der Antwort von Stefania. Anschließend startet jedoch ein anderer Mechanismus, in Verbindung mit einer anderen Klausel - vom Typ: Bild der Mathematik; oder: dem Lehrenden zugeschobene Erwartungen - : "Das kann nicht alles sein; in der Mathematik muss man rechnen; unsere Lehrerin erwartet das ganz bestimmt". Nun bricht die kritische Kontrolle zusammen und jede Berechnung wird richtig.

In unserer Arbeit (D'Amore, Sandri 1998) haben wir diese Klausel des *contrat didactique* wie folgt benannt: "Forderung nach einer formalen Rechtfertigung und Begründung" (esigenza della giustificazione formale, EGF) und sie in allen Einzelheiten untersucht. Diese EGF-Klausel ist auch in der Mittelschule weit verbreitet (Alter der Lernenden: 11 bis 14 Jahre). [Der Prozentsatz der Antworten "Giovanna" sinkt von 58,4 Prozent in der dritten Grundschulklasse (8 bis 9 Jahre) auf 24,4 Prozent in der zweiten Mittelschulklasse ab (12 bis 13 Jahre); aber nur 63,5 Prozent der Lernenden der zweiten Mittelschulklasse weisen - in welcher Form auch immer - auf die Unmöglichkeit hin, eine Antwort zu geben; dies bedeutet, dass 36,5 Prozent eine Antwort geben: mehr als ein Drittel jeder Klasse!]

Nun der Grundtyp einer Antwort auf die gleiche Aufgabe in der zweiten Mittelschulklasse; ich habe das Antwortprotokoll einer Schülerin ausgewählt und es genau so wiedergegeben, wie sie es schriftlich formuliert hatte:

Silvia:
Ich glaube, dass Giovanna [dann verbessert in: Paola] mehr Geld übrig behält, denn:
Giovanna gibt 10.000 aus, während Paola 20.000 ausgibt.
10.000 20.000
Giovanna Paola
20.000 minus 10.000 = 10.000 (Geld von Giovanna)
10.000 + 10.000 = 20.000 (Geld von Paola).

Das Protokoll von Silvia zeigt die Wirkungen der gleichen Klauseln des *contrat didactique*, die schon bei Stefania zum Zuge gekommen waren; eine Analyse ist jedoch schwieriger. Zunächst ist ein aufwendigerer Versuch zur Durchführung einer logischen und formalen Organisation zu sehen. Silvia schreibt zunächst "Giovanna", denn sie hat wie Stefania gedacht; dann jedoch - auf Grund der EGF-Klausel - meint sie, Berechnungen anstellen zu *müssen*. Es ist wahrscheinlich, dass sie - wenn auch nur undeutlich - bemerkt, dass ihre Rechenvorgänge von der Aufgabe abgelöst sind; sie rechnet nur deshalb, weil sie meint, einige Berechnungen *vornehmen zu müssen*. Wie absurd sie auch immer sein mögen: letztendlich sieht sie sie als plausibel an; da diese unsinnigen Berechnungen zu einem Ergebnis führen, das jenem Ergebnis zuwiderläuft, das auf intuitivem Wege erhalten worden war, zieht sie es nämlich vor, ihrer eigenen Intuition Gewalt anzutun, und sie akzeptiert eher die Lösung, die sie auf formalem Wege erhalten hatte; die Berechnungen führen zur Antwort "Paola" und nicht zu "Giovanna", wie sie jedoch zunächst vermutet hatte; sie streicht daher "Giovanna" durch und schreibt "Paola" hin. Der *contrat didactique* wurde dieses Mal durch ein formales (leeres, zerstörerisches) Bild der Mathematik vorgegeben und hat die Vernunft besiegt ...

In (D'Amore 1993b) berichte ich über einen merkwürdigen Versuch auf der Grundlage folgender Textaufgabe, die in einer Grundschule in verschiedenen Klassen gestellt wurde:

"Die 18 Lernenden der zweiten Klasse wollen einen Tagesausflug von Bologna nach Verona machen.
Sie müssen folgende Umstände berücksichtigen:
- Zwei von ihnen können nicht zahlen
- Von Bologna bis Verona sind es 120 Kilometer
- Ein Minibus mit 20 Plätzen kostet 200.000 Lire pro Tag plus 500 Lire pro Kilometer (einschließlich der Autobahngebühren).

Wieviel muss jeder ausgeben?"

Es ist überflüssig, anzumerken, dass die Aufgabe komplex ist, dass tatsächlich ein Ausflug geplant werden sollte, dass die Lernenden in Gruppenarbeit die Aufgabe hätten diskutieren und eine Lösung finden sollen, usw.
De fakto begeht die überwältigende Mehrheit der Lernenden bei der Lösung dieser Aufgabe einen häufigen Fehler: die Rückfahrt wird nicht berücksichtigt; daher werden die Gesamtkosten über den falschen Ausdruck 500 x 120 + 20.000 berechnet.
Zu diesem Punkt gibt es eine umfassende Bibliographie zur Rechtfertigung dieses Umstandes. Eine der häufigsten Begründungen betrifft eine Art ... strategischen oder affektiven Vergessens: die Hinfahrt stellt bei einem Ausflug einen emotional betonten Zeitraum dar, die Rückfahrt aber nicht.
Um diese Frage genauer verstehen zu können, teilte ich die Aufgabe in verschiedene Komponenten oder Phasen auf, mit vielen partiellen und spezifischen "Klein-Fragen"; der Fehler wurde jedoch weiterhin gemacht. Ich schlug dann einigen Lehrenden vor, die Szenen der Hin- und der Rückfahrt mimisch darstellen und die verschiedenen Momente des Ausflugs zeichnen zu lassen. Der unglaubliche Fall, vor dem ich stand, und den ich in (D'Amore 1993b) beschrieb, bezieht sich auf ein Kind, das den Bus unter einem Doppelpfeil gezeichnet hatte: in einem der Pfeile steht: "Bologna -> Verona 120 Kilometer"; im anderen Pfeil steht: "Verona -> Bologna 120 Kilometer"; dem Kind ist einwandfrei die Tatsache bewusst, dass es bei einem Ausflug eine Hinfahrt und eine Rückfahrt gibt; das gleiche Kind benutzt aber für die Lösung wieder nur die Daten für die Hinfahrt!

Eine der Begründungen, die die Kinder selbst im Rahmen der Befragungen am häufigsten gaben, ist darin zu sehen, dass sie sich nicht trauten, eine Angabe zu verwenden, die im Text nicht ausdrücklich auftaucht. Der Sinn der in den Mathe-Aufgaben enthaltenen Fragen ist offenbar kaum bedeutend; was demgegenüber wichtig ist, ist die Verwendung der Zahlenangaben, die ausdrücklich als solche präsentiert werden. Eines der Kinder antwortete auf Befragen: "Wenn du auch die Rückfahrt berechnen wolltest, dann hättest du es sagen müssen"; die vom Kind erfasste Lücke ist offensichtlich: bei keiner der Zahlenangaben scheint es zulässig zu sein, die Aufwendungen für die Kilometerstrecke zu verdoppeln.

Ebenfalls im Zusammenhang mit dem *contrat didactique* ist von äußerstem Interesse die Haltung der Lernenden angesichts der folgenden berühmten Aufgabe von Alan Schoenfeld (1987a):

"Ein Bus der Streitkräfte befördert 36 Soldaten. Wenn 1128 Soldaten per Bus zum Trainingslager gefahren werden sollen, wie viele Busse braucht man dann?"

Von den 45.000 fünfzehnjährigen Lernenden, die in den USA durch Schoenfeld untersucht wurden, gelang es weniger als einem Viertel (23%), die erwartete Antwort zu geben: 32 [5]. Der USA-Forscher behauptet daher, dass nur wenige Lernende in der Lage sind, den Sinn der Aufgabe zu entnehmen und es wagen, 32 hinzuschreiben, da diese Angabe nicht formal im Rahmen des Rechenvorgangs gewonnen worden ist; daher schlägt er als Begründung für dieses Verhalten bestimmte Fragen vor, die sich auf metakognitive Umstände beziehen.
Einige Jahre später wollten wir die gleiche Situation erneut analysieren (D'Amore, Martini, 1997), und wir konnten dabei einiges an Neuem ausfindig machen. Die Aufgabe wurde Lernenden verschiedener Schulniveaus gestellt, wobei die Kinder dahingehend frei waren, einen Taschenrechner zu benutzen oder nicht. Wir erhielten viele Antworten vom Typ: 31,333333, vor allem von Seiten der Lernenden, die einen Taschenrechner benutzten; andere Antworten lauteten:
$31,\overline{3}$ und 31,3.
Die Bedeutungskontrolle führt dann, wenn sie überhaupt vorgenommen wird, dazu, dass einige Lernende 31 schreiben (die Busse "kann man nicht aufteilen"); jedoch fühlen sich nur wenige Lernende dazu *ermächtigt*, 32 anzugeben. Unter den Lernenden, die den Taschenrechner benutzten, gibt es kein einziges Mal die Antwort "32".
Der Lernende fühlt sich nicht dazu befugt, etwas hinzuschreiben, was nicht auftaucht; auch wenn er eine semantische Überprüfung vornimmt, die dazu führt, dass Busse nicht in Tortenstücke aufzuteilen sind, so berechtigt ihn das offensichtlich nicht dazu, die Zahl 32 hinzuschreiben. Es gibt sogar einige Lernende, die sich noch nicht einmal dazu befugt sahen, 31 anzugeben; man kann dabei nicht einfach von einem "Fehler" auf Seiten des Lernenden sprechen, wenn man nicht als Fehler die Unfähigkeit ansehen wollte, nach Erhalt der Antwort zu überprüfen, ob sie semantische Kohärenz mit der gestellten Frage aufweist; danach kommt jedoch ein anderer Mechanismus zum Tragen. Der Lernende ist nicht bereit, zuzugestehen, dass er einen Fehler gemacht hat, und er spricht eher von einem "Trick" oder von einer "Falle"; für den Lernenden ist ein mathematischer Fehler oder ein Fehler in der Mathematik im-

[5] Anmerkung des Übersetzers: Hier scheint der Autor in seinen eigenen *contrat* getappt zu sein, denn wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, reicht natürlich ein einziger Bus ... !

mer ein Rechenfehler oder ein Fehler, der einem Rechenfehler gleichzusetzen ist, jedoch niemals ein Fehler semantischer Art.
Eine lange und systematische Untersuchung dieser Aufgabe, die auch in Form zahlreicher Befragungen der Lernenden vorgenommen wurde, hat offenbart, dass für diese Verhaltensweise eine bestimmte Klausel des *contrat didactique* "verantwortlich" zu machen ist, die wir wie folgt bezeichnet haben: "Klausel der formalen Weiterdelegierung (= Abtretung von Verantwortung)". Der Lernende liest den Text; er beschließt, welcher Rechenvorgang durchzuführen ist, und er entscheidet, mit welchen Zahlen vorgegangen werden muss; nun kommt die Klausel der formalen Weiterdelegierung zum Tragen: der Lernende braucht nicht mehr zu überlegen oder etwas zu kontrollieren. Unabhängig davon, ob er im Kopf rechnet - jedoch umso ausgeprägter, wenn er den Taschenrechner einsetzt - : stets gerät er unter jene Klausel, die... zum Verlust der rationalen und kritischen Fähigkeiten sowie der Kontrollfähigkeiten führt: die Verpflichtung und Aufgabe des Lernenden ist zu Ende, und nun braucht nur noch der Algorithmus - oder besser: die Maschine - für ihn zu arbeiten. Die nachfolgende Aufgabe des Lernenden besteht dann wieder darin, das Ergebnis einzutragen, wie auch immer es aussehen möge, und unabhängig davon, was dieses Ergebnis im Gesamtkomplex der Aufgabe bedeuten mag.

Die Untersuchungen zum *contrat didactique*, die praktisch weltweit durchgeführt werden, erweisen sich als äußerst fruchtbar und haben schon in wenigen Jahren Ergebnisse von großem Interesse mit sich gebracht, die ein immer besseres Verständnis der Epistemologie des Erlernens der Mathematik ermöglichen.

2. Konflikte und Fehlverständnisse

Ein weiterer Untersuchungsgegenstand im Bereich der Didaktik der Mathematik, der sich derzeit als äußerst stark und aussagekräftig darstellt, betrifft die so genannten *kognitiven Konflikte*. Es geht um folgendes: der Lernende kann sich im Laufe der Zeit eine bestimmte Vorstellung gebildet und eine Bildvorstellung angenommen haben; dieses Bild mag im Laufe der Zeit durch wiederholte Überprüfungen und Erfahrungen verstärkt worden sein. Aber es kann auch vorkommen, dass sich dieses Bild früher oder später als unangemessen erweist, wenn man es mit einem anderen Bild des gleichen Begriffs oder der gleichen Konzeption vergleicht, wie es z. B. durch den Lehrenden selbst oder durch andere Personen angeboten wird, und das nicht erwartet wurde und daher zum früheren Bild in Kontrast steht.
Auf diese Weise entsteht ein *Konflikt* zwischen dem früheren Bild, das der Lernende als endgültig ansah und sich auf den fraglichen Begriff bezog, und dem neuen Bild; dies geschieht vor allem dann, wenn das neue Bild die Grenzen der Anwendbarkeit des Begriffs erweitert oder eine umfassendere Darstellung des Begriffs bietet.

In Verbindung mit den Vorstellungen des "Bildes eines Begriffs" und eines "Konflikts" gibt es eine bedeutende Frage, die die *Fehlverständnisse / Missverständnisse* betrifft. Ein Fehlverständnis ist ein falscher Begriff und stellt daher ganz allgemein ein zu vermeidendes Ereignis dar; es wird jedoch nicht immer als eine Situation angesehen, die vollständig oder zweifelsfrei negativ ist; es ist nicht ausgeschlossen, dass es - um einen neuen Begriff / eine neue Konzeption konstruieren zu können - *erforderlich* wird, vorübergehend das Stadium eines Fehlverständnisses zu durchlaufen, sofern es einer richtigen Neuorientierung unterliegt.

Es ist darauf hinzuweisen, dass zumindest in einigen Fällen bestimmte Bilder Fehlverständnisse im eigentlichen Sinne darstellen können, also falsche Interpretationen der erhaltenen Informationen.
An dieser Stelle taucht das umfassende und interessante Problem des so genannten 'verborgenen Curriculums' auf. Der Lernende stößt auf seine eigenen Fehlverständnisse, wenn er *in korrekter Form unkorrekte* Regeln anwendet. Häufig liegt einem derartigen Umstand ein Nichtverständnis oder eine falsche Auslegung zu Grunde. Wenn der Lehrende dies nicht bemerkt, so werden seine Anregungen ins Leere fallen, denn der Lernende hat ja schon in sein eigenes Curriculum jene Regeln mit aufgenommen, die er als richtig ansieht, und die in bestimmten Fällen schon funktioniert haben.
So gab es zum Beispiel in einer dritten Grundschulklasse einen Lernenden, der in Form von einzelnen Spalten folgende Subtraktionsvorgänge durchführte:

37-	89-	26-	56-
24=	67=	18=	43=
13	22	12	13

Der Lehrende wies darauf hin, dass drei Subtraktionsvorgänge von insgesamt 4 korrekt gelöst worden waren, und er gab daher eine insgesamt positive Bewertung ab; soweit es die dritte Subtraktion betrifft, forderte er den Lernenden dazu auf, "sich einen Zehner zu leihen". Der Lernende verstand nicht, um welchen Zehner es gehen sollte, denn er dachte an eine andere persönliche Regel: um Subtraktionen in Form von Spalten durchzuführen, geht man von rechts nach links vor, und in jeder Spalte wird von der größeren Zahl jeweils die kleinere Zahl abgezogen. Diese Regel hatte sich in vielen Fällen bewährt; die Kommunikation, die sich auf Fälle wie die dritte Aufgabe bezog, war aus welchem Grunde auch immer bei ihm nicht angekommen, und er hatte daher in sein eigenes Schulprogramm diese "Regel" fest aufgenommen. Sie funktionierte *fast* immer, und in jenen Fällen, in denen sie nicht funktionierte, verstand er nicht, warum dies so war; denn er wandte ja *korrekt* eine Regel an, von der er nicht wusste, dass sie unrichtig ist. Genau dies ist ein Fehlverständnis.

Hierzu einige Beispiele:

Beispiel 1: Der Lernende hat immer Bilder von Rechtecken gesehen, deren Seiten (Basis und Höhe) jeweils unterschiedliche Längen aufweisen (auch wenn im Rahmen der gebotenen Definition lediglich Parallelogramme mit rechten Winkeln auftauchen). Dies hat dazu geführt, dass er als Urbild des Rechtecks eine Figur zugrundelegt, bei der die Basis und die Höhe unterschiedlich sein *müssen*:

Eines Tages analysiert der Lehrende etwas eingehender in logischer Hinsicht die Definition des Rechtecks und geht dabei von einem Parallelogramm aus; er zeigt, dass die Vorgabe lediglich den Öffnungsgrad der vier inneren Winkel betrifft (bei denen es sich ausnahmslos um rechte Winkel handeln muss), so dass der Fall eines Quadrats nicht ausgeschlossen ist, wenn man es als ein Rechteck ansieht, bei dem die Basis und die Höhe jeweils gleich lang sind. Nun entsteht ein kognitiver Konflikt - oder genauer: er kann entstehen - , in Verbindung mit dem Prototyp der erwarteten Figur (die durch die Erfahrung bestätigt worden ist), und zwar zwischen dem Bild des Rechtecks, das das Quadrat ausschließt, und dem neuen angebotenen Bild.

Beispiel 2: Ein Schüler der ersten Grundschulklasse hatte immer gesehen, dass ein Rechteck so gezeichnet wird, dass es auf der waagerechten Grundseite "aufruht", wobei die senkrecht gezeichnete Höhe kürzer ausfällt; daher hatte sich ein solches Bild des Begriffs "Rechteck" bei ihm festgesetzt, und dieses Bild wurde stets durch die Erfahrung bestätigt:

Eines Tages wurde ihm das Bild eines Rechtecks angeboten, dessen Basis zwar waagerecht verläuft, so dass die Höhe senkrecht ausfällt; in diesem Falle war jedoch die Basis kürzer als die Höhe:

Bedeutsam ist nun die Bezeichnung, die das Kind spontan vornahm, um den schon bestehenden Begriff an das neue Bild anzupassen, denn er definierte diese "neue Form" als "stehendes Rechteck".
Bei dieser spontanen Bezeichnungsgebung erkennt man den glücklichen Ausgang eines kognitiven Konflikts zwischen einem Fehlverständnis (dem scheinbar stabilen Bild eines "Rechtecks", das jedoch noch einer endgültigen Systematisierung bedurfte) und dem neuen Bild, das der Lehrende bewusst und richtig vorgeschlagen hatte.

[Einmal ist mir etwas ähnliches bei Lehrenden der Mittelschule passiert (jedoch nicht in Italien).
Als ich folgende Figur als "Trapez" bezeichnete:

|\
|_|

erhielt ich zunächst ausgeprägte Reaktionen in Form einer Nichtzustimmung, die natürlich sofort korrigiert wurden. Die stereotype Position des Trapezes hatte zunächst (natürlich nur einige Sekunden lang) eine durch Unbehagen geprägte Situation erzeugt.]

Man könnte noch viele Beispiele liefern, aber ich glaube, dass die aufgeführten Beispiele reichen müssten.

Der kognitive Konflikt ist daher ein "interner" Konflikt; er beruht auf der Nichtübereinstimmung zwischen zwei Begriffen oder zwischen zwei Bildern oder schließlich zwischen einem Bild und einem Begriff.
Der Konflikt kann jedoch auch sozialer Art sein. Nehmen wir an, dass der Lernende über ein Bild oder einen Begriff zu einem bestimmten Thema verfügt und davon ausgeht, dass dieses Bild oder dieser Begriff durch die gesamte Klasse geteilt werden (bzw., allgemeiner: durch die gesamte Gesellschaft); eines schönen Tages entsteht zwischen diesem Bild oder diesem Begriff ein Konflikt zu jenem Bild oder jenem Begriff, das/der durch die Lehrenden und/oder durch eine neue Situation angeboten wird; bei dieser Gelegenheit merkt der Lernende, dass sein eigenes Bild / sein eige-

ner Begriff überhaupt nicht durch die Klasse geteilt wird, sondern ganz im Gegenteil nur ihn selbst betrifft, so dass er nun isoliert dasteht; z. B. staunen seine Mitschüler überhaupt nicht über einen Vorschlag, den er seinerseits jedoch nicht akzeptieren kann. Nur ein einziges Beispiel: ein Quadrat wird stets so gezeichnet und durch die Lehrbücher immer so dargestellt, dass die Seiten horizontal und vertikal verlaufen; ein Rhombus wird sehr häufig mit horizontalen und vertikalen Diagonalen dargestellt. Der kleine Michel hat daher die Vorstellung, dass die Quadrate so und nicht anders sein und die Rhomben demgegenüber so und nicht anders ausfallen *müssen*; er ist überzeugt, dass seine Auffassung von allen Klassenkameraden geteilt wird; er glaubt daher implizit, dass es sich um eine Vorstellung handelt, die in breitem Maße oder sogar uneingeschränkt geteilt wird. Einige Zeit danach zeichnet nun der Lehrende ein Quadrat mit horizontalen und vertikalen Diagonalen, bezeichnet es aber nicht als "Rhombus", wie durch Michel erwartet, sondern als "Quadrat".
Michel merkt auf: hat der Lehrende sich geirrt? Aber er bemerkt stattdessen, dass der Rest der Klasse diese Benennung akzeptiert; es handelt sich nun um einen kognitiven Konflikt nicht nur auf der individuellen und "internen" Ebene, sondern sogar auf der sozialen Ebene, denn der kleine Michel steht nun im Konflikt zu einem Begriff, den er als allgemein geteilt angesehen hatte.

Die Grundlage für Konflikte stellen daher die *Fehlverständnisse* dar, also Vorstellungen, die vorübergehend nicht richtig sind und noch eine stärker ausgearbeitete und kritischere kognitive Neuordnung und Systematisierung benötigen. Nun ist aber darauf zu achten, dass der Lernende dies nicht weiß und daher davon ausgeht, dass seine Vorstellungen, die dem Forscher als Fehlverständnisse auffallen werden, jeweils richtige und wahrheitsgetreue Vorstellungen sind! Daher ist es der Erwachsene, der darum weiß, dass die von den Kindern erarbeiteten und übernommenen Vorstellungen jeweils Missverständnisse sind. Sie einfach als *Fehler* zu bezeichnen, wäre zu vereinfachend und banal; es geht nicht darum, zu bestrafen oder negativ zu bewerten; es geht demgegenüber darum, Hilfsmittel für eine kritische Ausarbeitung an die Hand zu geben. In einem gewissen Sinne könnte man sogar - da auch sehr kleine Kinder (3 bis 6 Jahre) über naive, jedoch profunde mathematische Vorstellungen verfügen (Agli, D'Amore, 1995), die empirisch oder auf dem Wege des sozialen Austausches gewonnen werden - davon ausgehen, dass die gesamte Schullaufbahn einer Person, soweit es die Mathematik betrifft, aus dem Übergang von Fehlverständnissen zu richtigen Vorstellungen besteht.
In einem gewissen Sinne können die Fehlverständnisse, wenn man sie wie vorstehend versteht (als vorübergehend nicht richtige Vorstellungen, die nur auf eine stärker ausgearbeitete und kritischere kognitive Neuregelung und Systematisierung warten), nicht beseitigt werden, und sie stellen keineswegs einen Schaden dar. Sie scheinen eher einen delikaten - jedoch notwendigen - Zeitpunkt des Übergangs darzustellen, und zwar von einer ersten elementaren Vorstellung (naiv, spontan, primitiv, ...) zu einer stärker ausgearbeiteten und richtigeren Vorstellung.
Die Grundlage für derartige Probleme scheinen offenbar in einigen Untersuchungen von Piaget-Inhelder zu liegen, auch wenn inzwischen eine erhebliche Weiterentwicklung der Forschungen auf diesem Bereich festzustellen ist. Sie betreffen auch die funktionale Starre, den Einstellungs-Effekt, die parasitären Kognitionen, usw. Um mich kurz zu halten, verweise ich auf (D'Amore 1993b).

3. Bilder und Modelle

Lediglich ein rascher Blick auf dieses komplexe Thema. Da ich weiter oben auf Termini wie "Bild" und "Modell" Bezug genommen habe, wäre es gut, zu klären, dass ich folgende Terminologie akzeptiere (sie jedoch nicht uneingeschränkt teile):
Das geistige / mentale Bild ist das figurative oder propositionale Ergebnis, das durch einen (inneren oder äußeren) Reiz erzeugt wird. Das geistige (mentale) Bild wird durch kulturelle Einflüsse und persönliche Stile geprägt; anders gesagt: es ist ein typisches Produkt des Individuums, jedoch mit Konstanten und Konnotationen, die zwischen verschiedenen Personen gemeinsam auftreten. Das mentale Bild kann mehr oder weniger bewusst ausgearbeitet sein (auch diese Fähigkeit zur Ausarbeitung hängt jedoch von der Einzelperson ab). Das mentale Bild ist jedoch intern und zumindest zunächst unwillkürlich.
Die Gesamtmenge der (mehr oder weniger bewusst) ausgearbeiteten mentalen Bilder, die sich alle auf einen bestimmten Begriff beziehen, stellt das mentale (innere) Modell dieses Begriffs dar.
Anders gesagt: der Lernende konstruiert sich ein Bild I_1 eines Begriffs C; er hält dieses Bild für stabil und endgültig. Aber zu einem gewissen Zeitpunkt seines kognitiven Werdeganges erhält er Informationen zum Begriff C, die nicht unter das Bild I_1 fallen, über das er bisher verfügte. Er muss dann (und das kann auf einen kognitiven Konflikt zurückzuführen sein, den der Lehrende erzeugen *will*) sein "altes" Bild an ein neues und umfassenderes Bild anpassen, das nicht nur die früheren Informationen aufgreifen muss, sondern das auch die neuen Informationen in sich aufnehmen wird. De fakto wird ein neues Bild I_2 von C konstruiert. Diese Situation kann sich mehrfach während der Schullaufbahn eines Lernenden wiederholen.
Viele der mathematischen Begriffe werden dadurch erhalten, dass im Laufe der Monate oder der Jahre jeweils Übergänge von einem Bild zu einem anderen und mächtigeren Bild erfolgen; man könnte sich daher diese Aufeinanderfolge von Konstruktionen der Begriffe, also die aufeinanderfolgenden Bilder I_1 I_2 ... I_n I_{n+1} ... als eine Art Treppe vorstellen, auf der man sich dem Begriff C "annähert".
Zu einem bestimmten Zeitpunkt während dieser Aufeinanderfolge von Bildern gibt es einen Augenblick, in dem das Bild, zu dem man nach verschiedenen derartigen Durchgängen gelangt ist, unterschiedlichen Belastungen "widersteht" und sich als ausreichend "stark" erweist, um sämtliche neuen Argumente oder Informationen mit aufzunehmen, die im Zusammenhang mit dem durch das Bild repräsentierten Begriff C eintreffen. Ein derartiges Bild, das stabil und nicht mehr veränderbar ist, könnte man als "Modell" M des Begriffs C bezeichnen.
Sich ein Modell eines Begriffs zu erarbeiten, bedeutet daher, nacheinander Bilder schwacher und nicht stabiler Art weiter auszuarbeiten, um zu einem starken und stabilen Bild zu gelangen.
Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
* Das Modell M bildet sich zum richtigen Zeitpunkt, in dem Sinne, dass es sich tatsächlich um das richtige Modell handelt, also genau um jenes Modell, das sich der Lehrende für C wünschte; die didaktischen Maßnahmen haben funktioniert, und der Lernende hat das richtige Modell M konstruiert (also das vom Lehrenden gewollte Modell), als Darstellung des Begriffs C;
* Das Modell M bildet sich zu früh heraus, also dann, wenn es erst durch ein Bild wiedergegeben wird, das nachfolgend hätte erweitert werden müssen; es ist dann nicht einfach, zum Begriff C zu gelangen, denn die Stabilität von M stellt an und für sich ein Hindernis für zukünftige Lernvorgänge dar.

Führen wir nun die Analyse der Modelle und ihrer Rolle im Rahmen der Lernvorgänge weiter fort.

Wenn ein Lehrender von einem Begriff C ein starkes und überzeugendes Bild anbietet, das dauerhaft ist und durch ständige Beispiele und Erfahrungen bestätigt wird, so verwandelt sich das Bild in ein *intuitives Modell.*
Kurz gesagt: es besteht eine direkte Übereinstimmung zwischen der vorgegebenen Situation und dem mathematischen Begriff, der gerade benutzt wird; dieses Modell könnte jedoch noch nicht jenes Modell des Begriffs C sein, das innerhalb des mathematischen Wissens erwartet wird.
Dies bedeutet folgendes: im Rahmen der Modelle bleibt die Bezeichnung "intuitives Modell" jenen Modellen vorbehalten, die uneingeschränkt den intuitivem Anregungen und Reizen entsprechen und daher unmittelbar und stark akzeptiert werden.
Manchmal spricht man auch von *parasitären Modellen*.
Nachdem z. B. das intuitive Modell der Multiplikation natürlicher Zahlen akzeptiert wurde, und wenn man es fälschlich auf sämtliche Multiplikationen ausweitet, und sofern darüber hinaus noch dieses intuitive Modell durch schematische Darstellungen (in Form von *Gruppen- oder Scharbildungen*) bestätigt wird, so entsteht ein parasitäres Modell, das sich wie folgt darlegen lässt: eine Multiplikation führt immer dazu, dass das Ergebnis größer wird; es *muss* immer größer werden.
Analog hierzu ist das parasitäre Modell der Division zu sehen. Unabhängig davon, ob man sich diesem Problem in Form des "Enthaltenseins" oder in Form der "Aufteilung" stellt: wenn man nicht ein wenig von Mathematikdidaktik versteht, kann man Gefahr laufen, dem Lernenden ein intuitives Modell zu vermitteln, das dazu führt, dass letztendlich ein parasitäres Modell entstehen wird: bei einer Division A durch B *muss* die Zahl B immer kleiner als die Zahl A sein.

Didaktisch ist es sinnvoll, noch instabile Bilder, die darauf warten, geeignete und aussagekräftige Modelle zu erzeugen, in einer Form zu hinterlassen, in der sie sich möglichst weitgehend dem mathematischen Wissen annähern, das man erreichen möchte.
Je "stärker" das intuitive Modell ist, umso schwieriger ist es, dieses Modell aufzubrechen, um es an ein neues Bild *anzupassen*. Dies bedeutet folgendes: das Bild als Fehlverständnis darf nicht zu einem Modell werden, da es auf Grund seiner eigentlichen Natur noch auf eine endgültige Regelung und Systematisierung wartet.
Es geht also darum, keine schiefen oder falschen Informationen zu geben; nicht nur darf man derartige Informationen nicht explizit weitergeben, sondern man muss vermeiden, dass sie sich automatisch bilden, um das Entstehen von parasitären Modellen nicht zu begünstigen.
Hierzu einige Beispiele im einzelnen.

Beispiel 1: Der Lernende hat jahrelang überprüfen können, dass der Multiplikationsvorgang "zu einer Zunahme des Wertes der Faktoren" führt; anders gesagt: das Produkt beider Faktoren ist größer als jeder Faktor für sich genommen (12 ist viel größer als 3 und als 4; 60 ist viel größer als 12 und 5, usw.). Auch die figurativen Bilder (von darstellenden und operativen Schemata), die dem Lernenden angeboten werden, um den Vorgang der Multiplikation akzeptabel und intuitiv erfassbar werden zu lassen, bestätigen diese intuitive Erwartung (dies gilt z. B. für einen ungeschickten Einsatz der so genannten "Reihenbildung", die im Rahmen der didaktischen Realität der Primarschule äußerst verbreitet ist). So besteht schon in der ersten Grundschulklasse das figurative Bild der Multiplikation (Beispiel: 3 x 4) aus 4 Reihen mit jeweils 3 Gegenständen:

...
...
...
...

Es versteht sich, dass eine derartige Figur *genau jenes* Bild des Begriffs verstärkt. Fatalerweise wird aber nun der Tag eintreten, an dem man 3 nicht mehr mit 4 multiplizieren muss, sondern mit 0,5; dann funktioniert das (inzwischen entstandene) Modell nicht mehr, und die durch das Modell vorausgesetzte allgemeine Regel der Zunahme wird hinfällig; somit entsteht der Konflikt (Fischbein, 1985, 1992).
Zu diesem Zeitpunkt ist es nicht einfach, sich die neue Situation anzueignen, um das frühere Modell an ein neues Modell anzupassen (denn das Merkmal der Modelle - im Vergleich zu den Bildern - besteht gerade in ihrer Stabilität).
Auf Grund dessen entsteht die didaktische Notwendigkeit, ein derartiges Bild nicht zu schnell zu einem stabilen Bild werden zu lassen, damit man es später noch erweitern kann, und zwar im Rahmen des Versuchs, in optimaler Form ein Modell für einen Begriff der Multiplikation zu konstruieren, der die nachfolgenden Ausweitungen auf die nicht natürlichen Zahlen berücksichtigen kann.
Es ist kein Zufall, wenn viele fortgeschrittene Lernende (auch an der Universität!) ihr Erstaunen in Anbetracht des Umstandes bekunden, dass bei einem Vergleich zwischen den beiden Rechenvorgängen 18 x 0,25 und 18 : 0,25 der erste Rechenvorgang zu einem kleineren Ergebnis führt. Sie behalten das falsche Modell bei, das auf der Grundschule entstanden ist, und auf dessen Grundlage "die Multiplikation zur Erhöhung der Werte führt".

Beispiel 2: Der Lernende hat stets eine große Zahl durch eine kleinere Zahl geteilt; anders gesagt: es ist in ihm das Bild entstanden, dass der Dividend stets größer als der Divisor sein *muss*. Er wird hierzu durch die Art und Weise veranlasst, in der die Division dargeboten wird: es handelt sich immer darum, viele Gegenstände auf wenige Schachteln aufzuteilen, oder Dinge dieser Art (Division in Form einer Aufteilung); oder es handelt sich immer um Behälter, die jeweils unterschiedliche Gegenstände in sich aufnehmen werden (Division als Fassungsvermögen). Aber dies führt dazu, dass der Lernende in Anbetracht einer Aufgabe folgenden Typs:
"15 Freunde teilen sich 5 Kilogramm Kekse. Wie viele Kekse bekommt jeder von ihnen?" [6] (Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino, 1983; D'Amore, 1993b)

auch dann, wenn er schon die höhere Schule besucht (Alter: 14 bis 19 Jahre), spontan dazu bewogen wird, die Division 15 durch 5 durchzuführen [er berechnet dann nicht, wie viele Kekse auf jeden Freund entfallen, sondern "wie viele Freunde auf jedes Kilo Kekse entfallen", entsprechend dem ironischen Kommentar eines Lernenden der ersten Klasse einer naturwissenschaftlichen Oberschule in Lugo (Provinz Ravenna) (Alter: 14 - 15 Jahre) aus Anlass der Befragung, als man ihn darum bat, über seine Teilung 15 durch 5 nachzudenken]. Es besteht ein Konflikt zwischen dem intuitiven

[6] Dies ist eine der Aufgabe aus einer Reihe von 42 Aufgaben, die in Deri, Sainati Nello und Sciolis Marino (1983) geboten werden; dieser Artikel wird von mir umfassend diskutiert, unter Vergleich seiner Ergebnisse mit den Ergebnissen, die ich selbst in der Romagna erhalten hatte: D'Amore (1993b), Seite 168 - 185.

Bild des Rechenvorgangs und jenem Bild, das anschließend in einer raffinierteren und eingehenderen Art und Weise konstruiert wird.
Jene Situationen, bei denen keine explizite Inanspruchnahme einer starken kognitiven Kompetenz vorliegt, hebt das intuitive Modell des Rechenvorgangs stets energisch seinen Kopf! In der Tat kann man davon ausgehen, dass auch dann, wenn der fortgeschrittene Lernende sich (mühsam) ein korrektes Modell eines Begriffs C konstruiert hat, das den mathematischen Kenntnissen ziemlich gut entspricht, unter normalen Bedingungen das intuitive Modell stets als Erstes hervorlugen wird und dadurch seine Hartnäckigkeit nachweist.
Um dies besser zu verstehen, wollen wir uns noch einmal die Frage jenes Lernenden aus der ersten Oberschulklasse ansehen, den wir soeben erwähnt hatten. In einer Routinesituation "fällt" der Lernende in die Falle, die sein eigenes intuitives Modell ihm bietet; wenn ich ihn jedoch während der Befragung entsprechend hinweise und ihm seine Aufgabe zurückgebe, so verursacht diese neue Situation eine andersartige und bewusstere Aufmerksamkeit sowie eine Inanspruchnahme stärkerer kognitiver Tatsachen; jetzt beherrscht nicht mehr das intuitive Modell die Szene, sondern das raffiniertere Modell, das kognitiv ausgearbeitet worden ist. Gerade die überraschte und amüsierte Reaktion des Lernenden beweist, dass er selbst nicht die Tatsache bemerkt hatte, ein intuitives Modell an Stelle eines raffinierteren Modells benutzt zu haben.

Beispiel 3 - Immer noch die Division. Im gleichen Artikel von Efraim Fischbein aus dem Jahre 1985, den wir soeben zitiert hatten, taucht ein weiterer sehr interessanter Test auf, den ich persönlich sehr häufig benutzt habe, vor allem aus Anlass von Treffen mit Lehrenden.
In Wirklichkeit besteht dieser Test aus 2 Übungen; ich habe die erste Übung vollständig unverändert beibehalten, während ich etwas den Wortlaut der zweiten Aufgabe überarbeitet habe, um dafür zu sorgen, dass sie, soweit es den Wortanteil betrifft, genau mit dem ersten Wortlaut übereinstimmt:

Aufgabe P1 - Eine Flasche Limonade enthält 0,75 Liter und kostet 2 Dollar. Wie viel kostet 1 Liter?
Aufgabe P2 - Eine Flasche Limonade enthält 2 Liter und kostet 6 Dollar. Wie viel kostet 1 Liter?

Wenn man lediglich die Aufgabe P1 zu lösen gibt und zunächst die Aufgabe P2 verdeckt hält, so wird man bei den Anwesenden stets einen mehr oder weniger langen Zeitraum der Unsicherheit feststellen. Wenn man auch P2 kurze Zeit danach vorlegt, und nach Entdeckung der Tatsache, dass es sich um das *gleiche* Problem handelt, werden viele Testpersonen bereit sein, freimütig zuzugestehen, dass, während die zweite Aufgabe unverzüglich durch die Division 6 durch 2 zu lösen ist, die Lösung der ersten Aufgabe mit der *analogen* Division 2 durch 0,75 zu etlichen Verwirrungen führt.

Sehen wir uns nun den Kommentar an, in dessen Rahmen ich einen Auszug benutzen werde, der durch Fischbein selbst zitiert wird:

"Auf Grund dessen lässt sich davon ausgehen, dass es gerade die Zahlen und die Beziehungen zwischen ihnen sind, die das Erkennen des Divisionsvorgangs als Lösungsverfahren blockieren oder aber erleichtern. Jeder Rechenvorgang weist zusätz-

lich zu seiner formalen Bedeutung auch eine oder mehrere intuitive Bedeutungen auf. Beide Ebenen können zusammenfallen oder aber nicht ".

Ich habe häufig versucht, die Lehrenden und die älteren Lernenden danach zu fragen, wie sie die Aufgabe P1 gelöst hatten. Einige haben zugegeben, 0,75 als 3/4 angesehen zu haben und so zum Bereich der Brüche übergegangen zu sein (wobei auch dies nicht immer einwandfrei gelungen ist). Andere haben demgegenüber zugestanden, dass sie die Aufgabe P1 durch die Proportion 0,75 : 2 = 1 : x gelöst und dann die bekannten Eigenschaften angewandt haben, um (erfolgreich) das Ergebnis zu erhalten. Nun ist darauf zu achten, dass im Laufe der Lösung dieser linearen Gleichung unter Auflösung auf die Unbekannte x hin ein Augenblick auftaucht, in dem man die Teilung 2 durch 0,75 durchführen *muss*, also scheinbar den gleichen Vorgang durchzuführen hat, der dann, wenn man ihn direkt anhand der Vorgaben der Aufgabe durchgeführt hätte, die Aufgabe P1 in einem kurzen Augenblick gelöst hätte. Aber es ist dennoch nicht dasselbe! Denn wenn es auf der einen Seite unzweifelhaft stimmt, dass bei vielen von uns ein sehr starker Widerstand dahingehend vorliegt, direkt die Division 2 durch 0,75 durchführen zu sollen (auf Grund des Widerspruchs zwischen der formalen Bedeutung und der intuitiven Bedeutung dieser Division), so besteht keinerlei Schwierigkeit mehr, sobald man die Regeln zum Bereich der Proportionen anwendet und *die einzelnen Schritte eines Algorithmus durchführt*, wenn dieser am Ende des Gesamtvorgangs auftaucht und von uns verlangt, *scheinbar den gleichen* Rechenvorgang auszuführen. Wie wir inzwischen wissen, kommt an dieser Stelle eine Klausel des *contrat didactique* zum Greifen, und zwar die Klausel der *formalen Delegierung*: in einem gewissen Sinne lassen wir uns nicht mehr direkt darauf ein, diesen merkwürdigen Vorgang durchzuführen; es geht nicht mehr um eine Wahl oder um eine persönliche Entscheidung. Wir befolgen dann nur noch eine Verfahrensvorschrift, die aus einer Reihe von automatischen Durchläufen besteht, zu denen wir über einen entsprechenden Konsens und eine Befugnisdelegierung verfügen, und zu denen wir uns nicht mehr in unserem Inneren um eine Schritt-für-Schritt-Rechtfertigung bemühen müssen.
Man muss zugestehen, dass diese Angelegenheit von ganz außerordentlichem Interesse ist.

Beispiel 4 - Die Addition. Auf der Grundlage einer Idee von Gérard Vergnaud (1982) [7] stellt Fischbein diesen Vorgang als ein weiteres Beispiel für die Nichtübereinstimmung zwischen der formalen Bedeutung und der intuitiven Bedeutung dar. Es handelt sich um 3 Additionsaufgaben mit jeweils einer Phase, die also mit einem einzigen Rechenvorgang zu lösen sind. Um dem Leser das Verständnis zu erleichtern, werde ich sie vollständig wiedergeben:

Aufgabe A - An einem Tisch sitzen 4 Jungen und 7 Mädchen. Wie viele sitzen da insgesamt?
Aufgabe B - Jean hat 4 Francs ausgegeben. Nun hat er noch 7 Francs in der Tasche. Wie viele Francs hatte er vorher?
Aufgabe C - Robert hat zwei Spiele gemacht. Im ersten Spiel hat er 4 Punkte verloren; aber am Ende des zweiten Spiels hat er einen Vorsprung von 7 Punkten. Was ist im zweiten Spiel passiert?

[7] Es handelt sich um die Studie zu einer sehr berühmten Dreiergruppe von Aufgaben, die in sehr vielen Texten zitiert wird; sie wird auch in D'Amore (1993b) dargestellt und diskutiert.

Alle 3 Aufgaben, dies ist sofort einsehbar, lassen sich durch den gleichen Vorgang 4+7 lösen; die Prozentsätze des Erfolgs unterscheiden sich jedoch voneinander auf eine unglaublich deutliche Art und Weise.
* Aufgabe A wird schon in der zweiten Grundschulklasse (Alter: 7 Jahre) gut gelöst: die richtigen Lösungen machen fast 100 Prozent aus. Diese Aufgabe weist eine nahezu perfekte *Übereinstimmung zwischen der formalen Bedeutung und der intuitiven Bedeutung* auf: die Addition ist jener Rechenvorgang, der zur Lösung von Aufgaben führt, die eine Vereinigung zwischen Sammlungen ohne gemeinsame Elemente betreffen. Aber fast keiner dieser Lernenden kann die Aufgabe B lösen, und die wenigen, die sie lösen, raten eher zufällig herum; schließlich gibt es nur 2 Zahlenangaben, die zur Verfügung stehen, 4 und 7 ...
* Aufgabe B wird - wenn auch mit Schwierigkeiten - in der vierten oder fünften Grundschulklasse (Alter: 9 oder 10 Jahre) gelöst; es lässt sich in jedem Fall darauf hinweisen, dass die korrekten Lösungen, die in bewusster Form gewonnen werden, einen erfreulichen Prozentsatz ausmachen.
* Aufgabe C führt zu einem so gut wie vollständigen Misserfolg. Sogar noch in der ersten und zweiten Mittelschulklasse (Alter: 11 oder 12 Jahre) weist die Aufgabe C Lösungsprozentsätze von lediglich 25% ca. auf, oder noch weniger, in Übereinstimmung mit den Untersuchungen von Vergnaud und Fischbein.

Es ist jedoch offensichtlich, dass es hierbei nicht nur um formale und intuitive Bedeutungen der Addition geht. An dieser Stelle handelt es sich auch - und vielleicht vorwiegend - um Schwierigkeiten, den Wortlaut in "erzählender" Form zu beherrschen [Und dies würde zu der wichtigen Frage nach der Abfassung des Wortlauts der Aufgaben überleiten, in deren Zusammenhang ich auf folgende Publikationen verweise: D'Amore (1993b); D'Amore, Franchini et alii (1995)].
Dieser Typ von Aufgaben zeigt unter einem didaktisch - anwendungsbezogenen Blickwinkel zumindest, dass das vermeintliche Kriterium der Schwierigkeit bei der Lösung von Aufgaben falsch ist, demzufolge die Zunahme der Anzahl der Rechenvorgänge, die für die Lösung durchzuführen sind, mit einer Zunahme der Schwierigkeiten gleichbedeutend sei. Es lässt sich leicht nachweisen, dass es viele Aufgaben gibt, die zwei Rechenvorgänge benötigen, und die erheblich leichter als die Aufgabe B zu lösen sind; die Aufgabe C bleibt, obwohl sie lediglich einen einzigen Rechenvorgang benötigt, außerhalb der Reichweite der gesamten Grundschule.
Der Widerstand gegen den Einsatz der Addition in Situationen, in deren Zusammenhang davon auszugehen ist, dass keine Übereinstimmung zwischen der formalen und der intuitiven Bedeutung vorliegt, wird nicht nur in der Grundschule nachgewiesen, sondern auch für die gesamte Mittelschule. Siehe hierzu z. B. Billio et alii (1993); in diesem Rahmen werden auch bestimmte Situationen analysiert, auf die die Lernenden in geeigneten Befragungen explizit hingewiesen hatten.

Beispiel 5 - Die Subtraktion. Die Subtraktion bietet schon *auf Grund ihrer Wesensart* mindestens zwei verschiedene intuitive Bedeutungen, trotz einer einzigen formalen Bedeutung; diese beiden unterschiedlichen intuitiven Bedeutungen lassen sich herausstellen, wenn man zwei Aufgaben zu Rate zieht, auf die ebenfalls Fischbein hingewiesen hatte:

1. Wenn wir 3 Murmeln aus einer Gesamtmenge von 10 Murmeln wegnehmen, wie viele Murmeln bleiben dann übrig?

2. Ich habe 7 Murmeln, ich brauche aber 10 für ein Spiel. Wie viele muss ich noch zu den Murmeln hinzufügen, die ich schon habe, damit ich mit dem Spiel anfangen kann?

Es versteht sich, dass beide Aufgaben durch eine Subtraktion zu lösen sind; im ersten Fall ist jedoch das *Wegnehmen* (wie Fischbein es nennt) intuitiv vorgegeben, denn es liegt eine Übereinstimmung zwischen der formalen Bedeutung und der intuitiven Bedeutung vor; im zweiten Fall scheint die Benutzung additiver Strategien vom Typ 7 + ... = 10 naheliegender zu seien, wobei in welcher Form auch immer davon auszugehen sein wird, dass die Pünktchen ... gleich 3 zu setzen sind. Auf der anderen Seite ist jede Strategie additiv, die als "Ergänzung zu" funktioniert, wie z. B. der Vorgang, den Rest in einem Geschäft herauszugeben: der Kaufmann berechnet üblicherweise nicht die Differenz, sondern er nimmt schrittweise eine Ergänzung vor, ausgehend von der jeweiligen Kostenposition, bis die gezahlte Summe erreicht wird. Es gibt daher unter den Lernenden einen gewissen Prozentsatz von unrichtigen Antworten; an Stelle der Subtraktion gibt es einige, die die Addition 7+10 oder 10+7 vornehmen, auf Grund der Tatsache, dass hier das Wort *hinzufügen* auftaucht, das die Verwendung der Addition nahelegt.
Es gibt einen starken Kontrast zwischen dem naiven und spontanen Rechenvorgang, der de fakto in einer konkreten Situation eingesetzt würde (also die Berechnung 7 + 1 + 1 + 1, mit der Antwort: 3, in Verbindung mit der Anzahl der + 1, die erforderlich sind, um auf 10 zu kommen), und der formalen Bedeutung der Subtraktion. Wenn es einen spezifischen Rechenvorgang gäbe, der die Anzahl der +1 ausdrückt, die es ermöglichen, von 7 auf 10 zu kommen, so würde wahrscheinlich der Prozentsatz der erfolgreichen Antworten deutlich ansteigen; natürlich könnte jemand sagen, dass es genau diesen Rechenvorgang schon gibt, und zwar die Subtraktion, die durch 10-7 ausgedrückt wird; die bislang durchgeführten Untersuchungen und angestellten Erwägungen zeigen jedoch, dass dies *nicht* jene intuitive Bedeutung ist, mit der die Lernenden für ihren kognitiven Bereich die Subtraktion konstruieren.

Und es gäbe noch viel zu sagen, soweit es eine Situation betrifft, die ich soeben weiter oben angedeutet habe, und die noch komplizierter ist, angesichts der *beiden intuitiven Bedeutungen* der Division, also der Aufteilung und des Enthaltenseins, die ja beide nur einer *einzigen formalen Bedeutung* entsprechen. Ich bin schon mehrfach auf Grundschullehrer gestoßen, die mir beichteten, sie würden diese beiden Bedeutungen getrennt voneinander behandeln, gewissermaßen wie zwei unterschiedliche Rechenvorgänge, um Unsicherheiten bei den Lernenden zu vermeiden.

4. Interne und externe Modelle: die "Übersetzung"

Das mentale Modell zu rekonstruieren, das eine Person von einem Begriff hat, ist ein schwieriges - vielleicht sogar unmögliches - Unterfangen; wenn die Person sich selbst gegenüber ihr eigenes mentales Modell kommentieren möchte, so wird sie es üblicherweise in einer internen Sprache tun, die absolut persönlich und frei von lexikalischen Regeln zu sein scheint. Aber wenn sie das eigene Modell extern mitteilen möchte, dann muss sie es in etwas "Externes" übersetzen [unabhängig von der Sprache, in der sie das Ergebnis übermitteln wird: verbal (mündlich oder schriftlich), nicht verbal (figurativ, mimisch, gestisch, usw.)].

Auf Grund dessen ist ein externes Modell eines Begriffs die Tatsache, dieses Modell in bewusster Form in einer wie auch immer gearteten Form von Sprache anzubieten, wobei dieses Angebot aus Notwendigkeit oder aus einem Kommunikationswunsch heraus erfolgt.

Ich habe das Verb "übersetzen" benutzt, denn es handelt sich um eine Übersetzung im eigentlichen Sinne, und viele der derzeitigen Forschungen beschäftigen sich mit den Modalitäten dieser Übersetzung und den Einflüssen, die durch Faktoren wie z. B. die Persönlichkeit, den kognitiven Stil, das Umfeld usw. auf einige Merkmale dieser Übersetzung ausgeübt werden (z. B. die interne Sprache und das stillschweigende Wissen).
Für die Didaktik der Mathematik weisen derartige Themen ein großes Interesse auf, denn die gesamte mathematische Kommunikation erfolgt über externe Modelle. Anders gesagt: wir werden niemals erfahren, wie das mentale Modell aussieht, das sich der kleine Michel z.B. im Hinblick auf die Höhen eines Dreiecks ausgedacht hat. Wenn wir ihn danach fragen, so würden wir lediglich das Ergebnis jener Übersetzung erhalten, von der ich oben schon gesprochen habe; danach ist es unmöglich, eine Übersetzung in umgekehrter Richtung vorzunehmen, um so zu dem mentalen Modell von Michel vorzustoßen .... Im Laufe von Gesprächen oder Überprüfungen wird Michel - auf Grund einiger Klauseln des *contrat didactique* - ganz im Gegenteil versuchen, externe Modelle vorzulegen, die sich dem annähern werden, was er als Erwartungen des Lehrenden ansieht, und die sich weniger an sein eigenes internes Modell annähern! Es gibt jedoch raffiniertere Untersuchungstechniken, die es gestatten, dafür zu sorgen, dass sich der Lernende von der Beziehung zum Lehrenden und Bewerter löst, ebenso wie vom Bild der Klasse als Ort der Suche nach einem Konsens. Wenn der Lernende dahingehend einwilligt, sich in einer natürlichen Sprache auszudrücken, z. B. dann, wenn er sich an ein kleineres Kind wenden müsste, um ihm zu erklären, was denn nun die Höhen eines Dreiecks sind, dann erhält man Informationen, die man zwar nicht naiv als eine genaue Beschreibung des (internen) mentalen Modells ansehen kann, die jedoch ziemlich persönlich und eingehend ausfallen werden.
Dies gilt für das - *nicht* zufällig ausgewählte Beispiel - , in dem ein Mädchen aus der zweiten Mittelschulklasse (Alter: 12 - 13 Jahre) die erwachsene Mutter spielt und ihrem siebenjährigen "Sohn" erklärt, warum Dreiecke drei Höhen haben:
Simona:
Mein Sohn, du kennst die Geometrie nicht; ich möchte dir aber erklären, was Höhe heißt. Wie du haben auch ich und Papa eine Höhe; man misst sie vom Kopf bis zu den Füßen. Auch die Dreiecke haben eine Höhe; diese Höhe misst man aber vom Scheitelpunkt (einem kleinen Punkt an der Spitze) bis zur Basis, die wie unsere Füße ist. Da nun die Dreiecke 3 kleine Spitzenpunkte haben, haben sie auch drei Höhen, denn sie haben unsere 3 Paar Füße. Und da wir nur einen einzigen Kopf und nur ein einziges Paar Füße haben, haben wir auch nur eine Höhe.

Nun ist keineswegs gesagt, dass das mentale Modell von Simona jenem Modell entspricht, das sie so gut mit Worten beschrieben hat; wenn man aber ein solches externes Modell in verbaler Form gewinnen will, dann erfordert das eine ganz erhebliche pädagogische Aufmerksamkeit und liefert uns viele Informationen zur Art und Weise, wie Simona sich eine kognitive Lösung vorgestellt hat, um dieses Modell zu akzeptieren (D'Amore, Sandri, 1996).

Zum Schluss werde ich mich darauf beschränken, die klassische Bibliografie anzugeben, denn es handelt sich um ein 'heißes', stark diskutiertes und sich weiterhin intensiv entwickelndes Thema.[8]

5. Das Dreieck: Lehrende, Lernende, Wissen

Die gesamte französische Lehrmeinung (und speziell Brousseau) betrachtet das Phänomen 'Lehren + Lernen' unter einem *systembezogenen* Aspekt und nicht als die gesonderte Untersuchung einer jeden seiner Komponenten. Unter diesem Blickwinkel wird in Arbeiten von Yves Chevallard seit 1982 ein Modell des *didaktischen Systems* zur Prüfung vorgestellt; es umfasst drei Komponenten: Lehrende, Lernende und Wissen (akademisches, offizielles, universitäres Wissen); man nennt es auch das *Dreieck der Didaktik*:

```
Lehrende              Lernende
            _____
            \   /
             \ /
              \/
```

Wissen (savoir savant)

Es ist klar, dass der Lehrende in eine Reihe von extrem delikaten Beziehungen eingebunden ist. Auf der einen Seite *muss er eine didaktische Umsetzung des Wissens (das auf der Forschung beruht) in das vermittelte Wissen vornehmen (entsprechend der Praxis im Unterrichtsraum*, vom Lehrenden aus gesehen) (Chevallard, 1985).
In Wirklichkeit ist der Übergang erheblich komplexer, denn *er geht vom mathematischen Wissen über das zu lehrende Wissen bis zum vermittelten Wissen.*
Die didaktische Umsetzung besteht somit darin, ein Element des Wissens aus seinem (universitären, sozialen usw.) Kontext zu lösen und es in den stets einzigartigen und stets besonderen Kontext des eigenen Unterrichtsraums zu übertragen.
Bei dieser Arbeit steht der Lehrende niemals als isoliertes Individuum da. De fakto ist es das Kollektiv und die Institution, die das Schulwissen objektivieren und definieren, ebenso wie die zugehörigen Methoden und den rationalen Charakter.
Die didaktische Umsetzung erzeugt dann eine bestimmte Reihe von Wirkungen: Vereinfachung und Entdogmatisierung; Schaffung von Artefakten oder Erzeugung von völlig neuen Gegenständen.
In Wirklichkeit hat die Schule niemals reines Wissen gelehrt, sondern *Lehrinhalte*, also etwas, das es nur innerhalb der Schule gibt, und das üblicherweise weder im Produktionsbereich noch in der Kultur eine unmittelbare Entsprechung findet. Sobald ein Wissensbereich oder ein Begriff in einen Lehrplan Aufnahme finden, werden sie in massiver Weise umgeformt und ihrer Natur beraubt, um einen anderen Status zu finden; sie gehen zu einer anderen Logik und einer anderen Rationalität über.
Der Begriff der *didaktischen Umsetzung (transposition didactique)* scheint auch für die Zukunft sehr bedeutend zu sein, wenn man ihn als die Arbeit zur Angleichung

[8] In meinem Buch *Problemi* (1993b) sind das gesamte Kapitel 12 und verschiedene Abschnitte in anderen Kapiteln diesen Themen gewidmet.

und Umformung des Wissens zu einem Lehrgegenstand versteht, und zwar - wie ich schon sagte - entsprechend dem Ort, dem Publikum und den vorliegenden didaktischen Zielsetzungen.
Auf der anderen Seite muss der Lehrende jedoch das didaktische System sowie das soziale und kulturelle Umfeld berücksichtigen, also die *Noosphäre*, in der er zu handeln hat.
Als Noosphäre kann man den Ort der Diskussionen über bedeutende Vorstellungen zum Unterricht verstehen, sowie zu den Zielsetzungen der Schule, den Zwecken der Ausbildung, den Erwartungen der Gesellschaft im Hinblick auf Schule und Kultur (Beispiel: die Lehrpläne); die Noosphäre ist die Vermittlerin zwischen dem Schulsystem (und den Entscheidungen des Lehrenden) und dem sozialen Umfeld im weitesten Sinne (außerhalb der Schule); man könnte die Noosphäre als den "äußeren Mantel bezeichnen, der sämtliche Personen beinhaltet, die in der Gesellschaft über die Inhalte und Methoden des Lehrens nachdenken" (Godino 1993).
Es gibt auch eine Beziehung zwischen der Noosphäre und dem *contrat didactique*, da einige Klauseln dieses Vertrags sicherlich in direkter Form durch das Umfeld beeinflusst werden, in dem man tätig ist.
Zu diesem wichtigen Thema möchte ich mich jedoch auf die vorstehenden kurzen Hinweise beschränken.

6. Kognitiver Stil und pädagogische Profile

In seinem berühmten Buch *Les profils pédagogiques* behauptet Antoine De La Garanderie (1980), dass es bei verschiedenen Personen unterschiedliche Formen der Evokation - durch die Erinnerung - im Hinblick auf eine Vorstellung oder ein mentales Bild gibt; einige sind "von ihrer Natur her" *visuell*, andere sind *auditiv*. Er bezeichnet dies als *pädagogische Muttersprache* und schlägt vor, *kognitive Gewohnheiten* zu definieren und Verwendungsfrequenzen zu messen (zum Beispiel im Klassenraum), um schließlich eine Typologie aufzustellen. Sodann unterscheidet er zwischen vier Parametern zur Charakterisierung der geistigen Vorgänge: zwei "einfache" [Evozieren von Dingen und Worten] und zwei "komplexe" [Evozieren von Beziehungen; Evozieren von Vorwegnahmen, oder erfinderisches Evozieren (visuell oder auditiv)]. Die Kombinationen dieser verschiedenen Parameter und der Grad der Beherrschung dieser Parameter gestatten es ihm, sechs kognitive Modelle zu definieren, die er als *kognitive Profile* bezeichnet.
Dies führt zur Vorstellung des *kognitiven Stils*, bei dem es sich meiner Meinung nach jedoch um eine erheblich umfassendere Frage handelt. Unbeschadet des Umstandes, dass es dabei um die Gesamtmenge der persönlichen Merkmale geht, über die jeder Mensch verfügt und die er im (bewussten oder nicht bewussten) Vorgang des Erlernens einsetzt, hängen sie nicht nur von "natürlichen" Gegebenheiten ab, sondern auch von vorübergehenden Befindlichkeiten, von der Bereitschaft, vom Interesse, der Motivation, usw.
Ich meine, dass nicht von ungefähr die Mathematik häufig unter den von De La Garanderie bevorzugten Analysebeispielen auftaucht. Die Modalitäten des Erlernens der Mathematik sind sicherlich stark an individuelle Faktoren gebunden, aber auch an die Stabilität und Labilität des Augenblicks, da unser Fach - vielleicht noch stärker als andere Fächer - Aufmerksamkeit und Konzentration erfordert.
Aber ich möchte hier auf eine weitere Vertiefung verzichten, denn man würde dadurch unvermeidbar zu tiefreichenden Problemen gelangen, die die didaktischen Mo-

delle, die Modellbildungen der Lernvorgänge und daher die Typologie der geistigen Vorgänge betreffen (Meirieu, 1987).

7. Hindernisse

Es ist nicht einfach, Begriffe zu bilden; denn jeder Begriff - auch wenn er einfach zu sein scheint - wird von einem fluktuierenden und komplexen Umfeld aus assoziativen Darstellungen umgeben, die zu vielfältigen Ebenem der Formulierung und unterschiedlichen Niveaus einer Einbindung des Begriffs führen (Giordan, De Vecchi, 1987).
Das erste Problem besteht also darin, den Begriff von diesem 'Halo' zu säubern, der die eigentliche Bedeutung zu verbergen scheint. Und dann ist an die *Hindernisse* zu denken, die sich vor den Lernvorgang schieben; dieser Gedanke wurde zum ersten Male durch G. Brousseau im Jahre 1983 vorgeschlagen, wobei er den entsprechenden Begriff aus philosophischen Untersuchungen von Gaston Bachelard entliehen hatte.
Wir wollen sehen, worum es hier geht: ein Hindernis ist eine Vorstellung, die zum Zeitpunkt der Herausbildung des Begriffs effizient gewesen war, um frühere Probleme (auch rein kognitiver Art) und Aufgaben zu lösen, der sich jedoch dann als Katastrophe erweist, wenn man versucht, ihn auf eine neue Problemstellung[9] anzuwenden. Auf Grund des eingetretenen Erfolgs (oder sogar: in noch stärkerem Maße auf Grund des Erfolgs) neigt man dazu, die schon erworbene und gefestigte Vorstellung beizubehalten, und man versucht, sie trotz des Fehlschlags zu retten; dadurch entsteht jedoch eine Barriere, die nachfolgende Lernvorgänge behindert.
Der Verfaser unterscheidet drei Typen von Hindernissen:
- Hindernisse ontogenetischer Art
- Hindernisse didaktischer Art
- Hindernisse epistemologischer Art.

Jede lernende Person entwickelt Fähigkeiten und Kenntnisse, die ihrem geistigen Alter angemessen sind (wobei sich das geistige Alter vom chronologischen Alter unterscheiden kann), die also für Mittel und Ziele des jeweiligen Alters angemessen sind; im Hinblick auf den Erwerb bestimmter Begriffe können diese Fähigkeiten und Kenntnisse unzureichend sein, und zwar in Anbetracht eines bestimmten didaktischen Projekts des Lehrenden, und sie können daher Hindernisse *ontogenetischer Art* darstellen (der Lernende könnte neurophysiologische Beschränkungen aufweisen, die z.B. nur auf sein chronologisches Alter zurückzuführen sind).
So zum Beispiel ist jeder Versuch zum Scheitern verurteilt, Beweise in der zweiten oder dritten Mittelschulklasse einzuführen (Alter der Lernenden: 12 bis 14 Jahre), wenn der Lehrsatz des Pythagoras vorgestellt wird; denn dies zwingt die Lehrenden dazu, den "Beweis in Form einer *demonstratio*" durch einen zuweilen konkreten "Nachweis" (ein Vorzeigen) zu ersetzen. Im allgemeinen wird davon ausgegangen, dass dieses Scheitern auf das Alter der Lernenden und auf ihre noch unreife Kritikfähigkeit zurückzuführen sei.
Ein weiteres Beispiel: zum Scheitern ist der Versuch verurteilt, in der Grundschule das logische Bindeglied "Implikation" (wenn A, dann B) einzuführen, und zwar aus den gleichen Gründen.

[9] Anm. d. Übers.: Das italienische Wort "problema" bedeutet sowohl 'Problem' wie auch 'Rechenaufgabe'.

Jeder Lehrende wählt ein Projekt, einen Lehrplan, eine Methode; er interpretiert in persönlicher Form die didaktische Umsetzung, gemäß seinen eigenen wissenschaftlichen und didaktischen Überzeugungen; er glaubt an seine Wahl und stellt sie der Klasse vor, weil er sie für effizient hält; aber das, was tatsächlich für einige Lernende effizient sein wird, ist es nicht unbedingt auch für den Rest der Klasse. Für diese *anderen Lernenden erweist sich die Wahl dieses Projekts als ein didaktisches Hindernis.*
Ein Beispiel für ein didaktisches Hindernis ist die Präsentation von Seiten einiger Lehrender der Grundschule, wenn die unendlichen Gegenstände vorgestellt werden: das Segment als unendlich viele Punkte, die Gerade als unbegrenzte Figur. In den Schulen ist jenes Modell am weitesten verbreitet, das das Segment als eine Perlenkette darstellt; auf Grund seiner Unmittelbarkeit wird dieses Modell von den Lernenden sofort akzeptiert und wird zu einem intuitiven Modell; natürlich stellt es ein didaktisches Hindernis dar, wenn die Idee der Dichte in der Grundschule und - noch ausgeprägter - in der Mittelschule eingeführt werden soll, oder wenn der Gedanke der Stetigkeit in der Höheren Schule auftaucht. Eingehende Untersuchungen haben umfassend nachgewiesen, dass die älteren Lernenden (letztes Jahr der Höheren Schule und Anfangsjahre der Universität) nicht in der Lage sind, den Begriff der Stetigkeit zu beherrschen, und zwar gerade wegen des weiterhin bestehenden intuitiven Modells des Segments als einer Perlenkette. Soweit es die Gerade als unbegrenzte Figur betrifft, so scheinen die Gerade selbst sowie die fortgesetzte Zählung der natürlichen Zahlen die Lernenden in die Lage zu versetzen, das Unendliche nur als Möglichkeit (*in potentia*) zu sehen, aber nicht als Wirklichkeit (*in actu*); auch dies führt zu schwerwiegenden didaktischen Hindernissen während des nachfolgenden Unterrichts.

Jedes Thema mit mathematischem Charakter weist einen eigenen epistemologischen Status auf, der von der Geschichte seiner Entwicklung innerhalb der Mathematik abhängt, ebenso wie von seiner kritischen Übernahme im Bereich der Mathematik, sowie von den Vorbehalten, die für das Thema spezifisch sind, von der Sprache, in der es ausgedrückt wird oder die es benötigt, um sich ausdrücken lassen zu können.
Wenn innerhalb der Geschichte der Entwicklung eines Begriffs eine Unterbrechung der Kontinuität, ein Bruch oder radikale Änderungen der Auffassung auftreten, dann lässt sich vermuten, das dieser Begriff in seinem Inneren Hindernisse epistemologischer Art verbirgt, die das Erlernen behindern; dies äußert sich zum Beispiel in immer wiederkehrenden und typischen Fehlern verschiedener Lernender in verschiedenen Klassen, sofern sie über die Jahre jeweils Stabilität aufweisen.
So stellt das mathematisch Unendliche sicherlich ein epistemologisches Hindernis dar; man braucht nur die Geschichte dieses Begriffs im Rahmen der Mathematik nachzuzeichnen, um auf die Kämpfe, die Diskussionen und die Brüche zu stoßen, die schließlich zur Akzeptierung dieses Begriffs führten, seit Zenon aus Elea (5. - 6. Jahrhundert vor Christus) seine berühmten *Paradoxa* einführte, bis zur durch Aristoteles aus Stagyra (3. Jahrhundert vor Christus) ausgesprochenen Verurteilung des Unendlichen *in actu*, und schließlich bis zu seiner vollständigen Übernahme dank des Wirkens von Georg Cantor (Wende vom 19. zum 20. Jhdt.). In didaktischer Hinsicht wurde diese Angelegenheit umfassend im internationalen Rahmen untersucht.
Auch die Zahl Null stellt ein epistemologisches Hindernis dar; sie fehlte bei fast allen Völkern der Antike, unter Einschluss der Griechen und Römer, und sie taucht erst im 6. Jahrhundert nach Christus in Indien auf; ihre Bekanntmachung erfolgte über die arabische Welt ab dem 9. Jahrhundert; die Präsenz dieses Begriffs in europäi-

schen Werken aus dem 13. und 14. Jahrhundert wurde jedoch stark durch erbitterte Kämpfe behindert. Eine uneingeschränkte Zustimmung zur Null als einer Zahl im eigentlichen Sinne erfolgte erst spät, vielleicht erst im 16. Jahrhundert. In didaktischer Hinsicht ist bekannt, dass der Lernende die Null als eine "besondere" Zahl ansieht und sie nur schwer beherrscht.
Die ganzen Zahlen, die ein Vorzeichen aufweisen und in der Schule als "relativ" bezeichnet werden, tauchen erst im sechsten Jahrhundert nach Christus in Indien auf; ihre Geschichte ist mit dem Werdegang der Null vergleichbar, wird jedoch stärker behindert und führt noch später zum Erfolg. Es ist sicherlich überflüssig, daran zu erinnern, dass in didaktischer Hinsicht es auf Seiten der Lernenden viele Schwierigkeiten gibt, sich hinsichtlich der Funktionsweise dieser Zahlen Rechenschaft abzulegen. Ein klassisches Beispiel ist die merkwürdige Tatsache, dass das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist.

Um zusammenzufassen: das ontogenetische Hindernis hängt mit dem Lernenden und seiner Reife (in vielerlei Hinsicht) zusammen, das didaktische mit der strategischen Wahl des Lehrenden, und das epistemologische Hindernis mit der Art des Themas selbst.

Wann und aus Anlass welcher mathematischer Gedanken könnte mit Wahrscheinlichkeit ein epistemologisches Hindernis auftreten?

* Fast sicher wird ein epistemologisches Hindernis bei jenen Vorstellungen auftreten, bei denen die historische Analyse einen Bruch, einen plötzlichen Umschlag, eine Nicht-Kontinuität der historisch-kritischen Entwicklung dieser Vorstellung offenbart;
* Ein epistemologisches Hindernis wird im Zusammenhang mit einer Vorstellung vorliegen, wenn ein bestimmter Fehler mehr oder weniger in gleicher Art im Zusammenhang mit der Vorstellung wiederholt auftritt.

Die Suche nach Hindernissen ist jeweils gleichzeitig - und diese Verbindung ist äußerst interessant - durchzuführen, und zwar:
* in der Schule, in der didaktischen Praxis; und:
* bei der Untersuchung der Geschichte der Mathematik,

wobei beide Forschungen miteinander zu verbinden sind.
Von größtem Interesse ist die Position, derzufolge - siehe hierzu Federigo Enriques (1942) [10] - der Fehler "weder dem logischen Vermögen noch der Intuition angehört, [sondern] in dem schwierigen Augenblick ihrer Verbindung entsteht".
Der Fehler ist daher nicht notwendigerweise nur die Frucht der Unwissenheit, sondern er könnte auch das Ergebnis eines früheren Wissens sein, eines Wissens, das erfolgreich gewesen war, und das zu positiven Ergebnissen geführt hatte, das jedoch nicht mehr standhält, wenn man es mit triftigeren oder allgemeineren Umständen konfrontiert.
Daher geht es nicht immer um einen Fehler unbekannten Ursprungs - also um einen nicht vorherzusehenden Fehler - , sondern um das Offenbarwerden von Hindernissen in der weiter oben angesprochenen Bedeutung. Diese Erwägungen haben die Forschungen zur Didaktik der Mathematik dazu geführt, den Fehler und seine Rolle vollkommen anders als die übliche Praxis neu zu bewerten.

[10] Um diesen Artikel in der Literatur zu finden, muss man nach dem Autor Adriano Giovannini suchen, also dem Pseudonym, das Enriques unter dem faschistischen Regime annehmen musste, um sich den Rassenverfolgungen zu entziehen, und vor allem, um weiterhin - entgegen dem Verbot - publizieren zu können. Man findet dann den entsprechenden Hinweis (Giovannini 1942).

Derartige Untersuchungen sind äußerst faszinierend und haben schon zu interessanten Ergebnissen geführt; an dieser Stelle muss ich sie nun aber leider übergehen.

Bibliographie:

Aglì F. D'Amore B. (1955) *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia.* Milano, Juvenilia	*Die mathematische Erziehung in der Grundschule*
Baruk S. (1985) *L'âge du capitaine.* Paris, Seuil	*Das Alter des Kapitäns*
Billio R., Bortot S., Caccamo I. Giampieretti M., Lorenzoni C. Rubino R. Tripodi M. (1993) Sul problema degli ostacoli intuitivi nell'uso dell'addizione. *La matematica e la sua didattica.* 4, 368 - 386	Das Problem der intuitiven Hindernisse bei dem Gebrauch der Addition
Brousseau G. (1983). Obstacles Epistémologiqes en Mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* Band 4.2, 165 - 198 Aber die philosophischen Grundlagen dieser Vorstellung lassen sich sicherlich auf G. Bachelard zurückführen: *La formation de l'esprit scientifique* 1938	Epistemologische Hindernisse in der Mathematik *Die Entstehung des wissenschaftlichen Geistes*
Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 7, 2, 33 - 115	Grundlagen und Methoden der Didaktik der Mathematik
Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné* Grenoble, La Pensée Sauvage	*Die didaktische Umsetzung - vom gelehrten Wissen zu dem im Unterricht vermittelten Wissen*
Chevallard Y., Joshua M. - A. (1982)	Ein Analysebeispiel für didaktische Um-

Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 3, 1, 159 - 239	setzungen: der Begriff des Abstandes
D'Amore B. (1993a) Il problema del pastore *La vita scolastica* 2, 14 - 16 Firenze: Giunti	Die Schäfer-Aufgabe
D'Amore B. (1993 b) *Problemi - Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving* Milano: Angeli Zweite italienische Auflage: 1996 [Ausgabe in spanischer Sprache: Madrid, Sintesis, 1996.]	*Probleme und Aufgaben - Pädagogik und Psychologie der Mathematik bei der Lösung von Aufgaben*
D'Amore B. (1999) *Elementi di Didattica della matematica* Bologna: Pitagora	*Elemente der Didaktik der Mathematik*
D'Amore B. (2001): *Didattica della matematica* Bologna: Pitagora	*Didaktik der Mathematik*
D'Amore B. Franchini D. Gabellini G. Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N., Sandri P. (1995): La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 18A - 2 - 131-146	Die Neuformulierung der Texte von Standard-Schulaufgaben
D'Amore B, Martini B. (1997): Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard *La matematica e la sua didattica* 2, 150 - 175, Bologna: Pitagora	Contrat didactique, mentale Modelle und intuitive Modelle bei der Lösung von Standard-Schulaufgaben
D'Amore B., Sandri P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica* 3, 348 - 353, Bologna: Pitagora	Eine Klassifizierung der so genannten unmöglichen Aufgaben

Nachdruck in: A. Gagatsis (Herausgeber): *Didactiché ton Mathematicon* Erasmus ICP 93 G 2011/II Thessaloniki 1994. In griechischer Sprache: 247-252; in französischer Sprache: 579-584.	
D'Amore B., Sandri P. (1998) Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica* 1, 4 - 18, Bologna: Pitagora Französische Übersetzung in: *Scientia Paedagogica Experimentalis* Belgien, XXXV, 1, 1999, 55-94.	Antworten der Lernenden auf Standard-Schulaufgaben mit einer fehlenden Angabe
D'Amore B., Sandri P. (1996) Fa' finta di essere ... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 19A - 3 - 223-246	Stell dir vor, du wärst ... Untersuchung zur Verwendung der Gemeinsprache im mathematischen Kontext der Mittelschule
De La Garanderie A. (1980) *Les profils pédagogiques* Paris: Le Centurion	*Die pädagogischen Profile*
Deri M., Sainati Nello M., Sciolis Marino M. (1983) Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 6- 6 - 6-27	Die Rolle der primitiven Modelle bei der Multiplikation und der Division
Filloux J. (1973) *Positions de l'enseignant et de l'enseigné* Paris: Dunod	*Positionen des Lehrenden und des Lernenden*
Fischbein E. (1985) Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: L. Chini Artusi (Herausgeber): *Numeri e operazioni nella scuola di base* Bologna: Zanichelli, 122-132	Intuitive Hindernisse bei der Lösung elementarer Rechenaufgaben *Zahlen und Rechenoperationen in der Grundschule*
Fischbein E. (1992): Intuizione e dimostrazione In: E. Fischbein - G. Vergnaud	Intuition und Beweis *Mathematik in der Schule: Theorien und Erfahrungen*

Matematica a scuola: teorie ed esperienze A cura di B. D'Amore Bologna: Pitagora; 1-24	
Giordan A., De Vecchi G. (1987) *Les origines du savoir* Delachaux et Niestlé Seite 178	*Die Ursprünge des Wissens*
Giovannini A. (Enriques F.) (1942) L'errore nelle matematiche *Periodico di matematiche* IV, XXII	Der Fehler in der Mathematik
Godino J. D. (1993) La metafora ecologica en el estudio de la noosfera matematica *Quadrante 2, 2, 69-79*	Die Öko-Metapher bei der Untersuchung der mathematischen Noosphäre
Meirieu P. (1987) *Apprendre ... oui, mais comment?* Paris: ESF	*Lernen ... natürlich; aber wie?*
Schoenfeld A. H. (1987a): What's all the fuss about metacognition? In: Schoenfeld A. H. (Herausgeber) (1987b) 189.215	Was soll das ganze Gerede über die Metakognition?
Schoenfeld A. H. (Herausgeber) (1987b) *Cognitive science and mathematics education* Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.	*Kognitive Wissenschaft und Erziehung zur Mathematik*
Vergnaud G. (1982) A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: Carpenter T. P., Moser J. M., Romberg T. A. (Herausgeber): 39.59.	Eine Klassifizierung der kognitiven Aufgaben und Denkvorgänge bei Additions- und Subtraktionsaufgaben.